Problème 1

1. D'après Hooke, les allongements des parties sont respectivement :

$$\Delta\ell_1 = \frac{P\ell_1}{E_1F_1} \text{ et } \Delta\ell_2 = \frac{P\ell_2}{E_2F_2}$$

2. L'allongement total vaut alors :

$$\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = \frac{P\ell_1}{E_1F_1}(1+\varphi) \qquad \text{où} \qquad \varphi = \frac{E_1F_1}{\ell_1}\cdot\frac{\ell_2}{E_2F_2}$$

3. On en déduit la force P

$$P = \frac{1}{1+\varphi}\cdot\frac{E_1F_1}{\ell_1}\cdot\Delta\ell$$

avec $\varphi = \frac{120}{210}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{0.8}{0.5} = 1.83$

$$P = \frac{1}{1+1.83}\cdot\frac{120\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-4}}{0.5}\cdot0.25\cdot10^{-2} = 42.4\text{ kN}$$

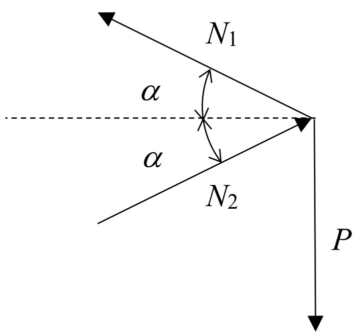
4. Contraintes et allongements relatifs peuvent alors être déterminés :

Partie (1) : $\sigma_1 = \frac{P}{F_1} = 212\text{ MPa}$ $\qquad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = 0.177\%$

Partie (2) : $\sigma_2 = \frac{P}{F_2} = 424\text{ MPa}$ $\qquad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = 0.202\%$

Problème 2

1. Schéma de l'équilibre des forces au point C



2. L'équilibre selon l'axe horizontal donne

$$N_1 = N_2 = N$$

3. Comme les barres ne travaillent qu'en traction et compression, l'équilibre des forces au point C donne :

$$P = 2N\sin\alpha$$

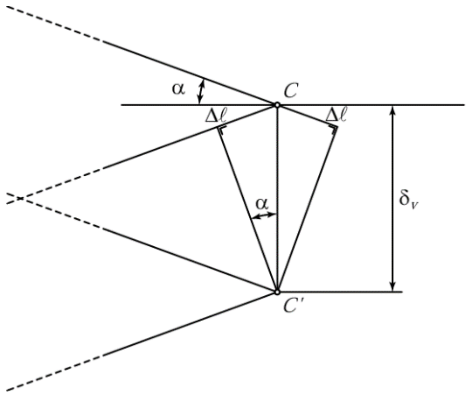
4. Loi de traction compression. La barre BC est donc comprimée par la force N et se raccourcit de la quantité :

$$\Delta\ell = \ell\varepsilon = \ell\frac{\sigma}{E} = \frac{\ell N}{EF} = \frac{Pb}{2EF}\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

La barre AC est mise en traction par une force de même module N et s'allonge de la même quantité $\Delta\ell$ trouvée précédemment.

5. Déplacement vertical : Si le déplacement est faible, les cercles peuvent être remplacés par leur tangente. Ainsi, le point C se déplace au point C', comme le montre la figure ci-contre. En utilisant la trigonométrie, on obtient le déplacement vertical suivant :

$$\delta_v = \frac{\Delta\ell}{\sin\alpha} = \frac{Pb}{2EF}\frac{1}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$$



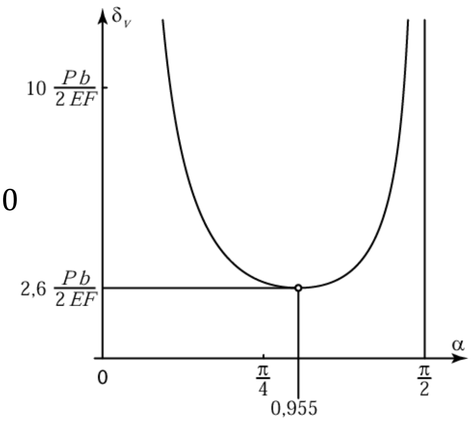
La figure montre également que le déplacement horizontal est nul au premier ordre

6. Représentation de la fonction $\delta(\alpha)$:

La fonction δ_v est minimum quand $\sin^2\alpha\cos\alpha$ est maximum :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin^2\alpha\cos\alpha\right) = 0$$
$$2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = (3\cos^2\alpha - 1)\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}955 \cong 55°$$



La fonction δ_v présente en plus deux asymptotes verticales :

$\alpha = 0$: le système est statiquement indéterminé

$\alpha = \frac{\pi}{2}$: les barres sont infiniment longues et ont ainsi une rigidité nulle

Problème 3

1. Sous l'effet thermique, le cuivre se dilate davantage que l'acier. L'acier se trouve donc soumis à une force de traction et le cuivre à une force de compression de même valeur absolue. Les allongements sont donc les mêmes et valent :

$$\Delta h_{méca\_Ac} + \Delta h_{therm\_Ac} = \frac{\sigma_1}{E_1}h + \alpha_1 h \Delta\theta = \Delta h_{therm\_Cu} - \Delta h_{méca\_Cu} = \alpha_2 h \Delta\theta - \frac{\sigma_2}{E_2}h$$

2. Les forces auxquelles sont soumises respectivement la partie en Acier et la partie en Cuivre sont équivalentes bien que de signe opposé (système fermé)

$$N_{Ac}=|N_{Cu}|$$

Et donc

$$N_{Ac} = \sigma_1 F_1 = N_{Cu} = \sigma_2 F_2$$

3. En combinant ces deux expressions on peut alors exprimer les contraintes comme étant :

$$\sigma_1 = (\alpha_2 - \alpha_1)\frac{E_1}{1+\mu}\Delta\theta$$

$$\sigma_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)\frac{\mu E_2}{1+\mu}\Delta\theta$$

4. Le déplacement relatif des deux plaques est :

$$\Delta h = h\left(\frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1\Delta\theta\right) \quad ou \quad \Delta h = h\left(\alpha_2\Delta\theta - \frac{\sigma_2}{E_2}\right)$$

$$\Delta h = \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1+\mu}\right)\cdot h\Delta\theta$$

5. Application numérique :

Acier S235 (VSM)
$E_2 = 210$ GPa $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}$/°C

Cuivre recuit (VSM)
$E_1 = 120$ GPa $\alpha_1 = 17 \cdot 10^{-6}$/°C

$\mu = 0.7$
$\sigma_1 = 24.7$ MPa
$\sigma_2 = 61.8$ MPa
$\Delta h = 0.3$ mm